Capítulo 3

- **3. Inferência estatística**
- 3.1. Intervalos de confiança para um parâmetro
- 3.2. Testes de hipóteses sobre um parâmetro: estatística t
- 3.3. Testes de hipóteses sobre uma combinação linear de parâmetros
- 3.4. Testes de hipóteses sobre várias combinações lineares de parâmetros: estatística F

Introdução

- **Exemplos**

Peso de um bebé à nascença

$$peso = \beta_0 + \beta_1 cigs + \beta_2 idade + \beta_3 educ + \beta_4 nconsul + u$$

- Será que o número de consultas é uma variável relevante para explicar o peso?

$$H_0 : \beta_4 = 0 \qquad H_1 : \beta_4 \neq 0$$

Teste de significância individual

- Será que se a mãe tiver mais uma consulta durante a gravidez compensa o efeito negativo no peso decorrente de fumar mais 2 cigarros?

$$H_0 : 2\beta_1 + \beta_4 = 0 \qquad H_1 : 2\beta_1 + \beta_4 \neq 0$$

Teste de uma restrição linear sobre os parâmetros

- Será que o peso depende apenas do número de cigarros?

$$H_0 : \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 0,\ \beta_4 = 0 \qquad H_1 : \beta_2 \neq 0 \vee \beta_3 \neq 0 \vee \beta_4 \neq 0$$

Teste de significância conjunta
Várias restrições em simultâneo

$$\boxed{peso = \beta_0 + \beta_1 cigs + u} \qquad \boxed{peso = \beta_0 + \beta_1 cigs + \beta_2 educ + \beta_3 idade + \beta_4 nconsul + u}$$

Modelo sob H_0

Modelo sob H_1

Distribuição amostral do estimador OLS

- Hipótese DS.6: Distribuição Normal dos erros

$u_i \sim N(0, \sigma^2)$ Independente de $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}$

- Teorema 1: Sob as hipóteses DS.1 a DS.6 prova-se que,

$\hat{\beta}_j \sim N(\beta_j, Var(\hat{\beta}_j))$ equivalentemente $\dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{sd(\hat{\beta}_j)} \sim N(0, 1)$

- Teorema 2: Sob as hipóteses DS.1 a DS.6 prova-se que,

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k-1}$$

Estatística *t*

Note-se que $sd(\hat{\beta}_j)$ depende de σ^2 que é desconhecido enquanto que $se(\hat{\beta}_j)$ depende de $\hat{\sigma}^2$. A substituição de σ^2 por $\hat{\sigma}^2$ altera a distribuição do rácio da N(0,1) para a distribuição t-student.

3.1. Intervalos de Confiança para um parâmetro

- **Intervalo de confiança para β_j**

$$\beta_j \in \left(\hat{\beta}_j - se(\hat{\beta}_j)t_{\alpha/2} ; \hat{\beta}_j + se(\hat{\beta}_j)t_{\alpha/2}\right) \text{ com } (1-\alpha)\times 100\% \text{ de confiança}$$

$$\text{com } t_{\alpha/2} : P\left(t(n-k-1) > t_{\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

Esta probabilidade é igual a 0.025 para um nível de confiança de 95%

- **Exemplo**

Dependent Variable: PESO (gramas)
Method: Least Squares
Included observations: 1644 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3170.187	115.8661	27.36079	0.0000
CIGS	-10.49749	3.338919	-3.143977	0.0017
IDADE	3.558060	3.130502	1.136578	0.2559
EDUC	0.975131	7.147705	0.136426	0.8915
NCONSUL	11.46307	3.765319	3.044381	0.0024

R-squared	0.013998	Mean dependent var	3409.99
Adj. R-squared	0.011592	S.D. dependent var	570.58
F-statistic	5.817211	Prob(F-statistic)	0.00012

INTERVALO DE CONFIANÇA A 95% para β_1

$\beta_1 \in$ (-10.50 – 1.96x3.34 ; -10.50 + 1.96x3.34)

$\beta_1 \in$ (-17.05 ; -3.95) com 95% de confiança

3.2. Testes de hipóteses sobre um parâmetro

- **Teste de significância individual**

A variável x_j não tem efeito na determinação de y depois de controlar pelo efeito de todas as outras variáveis explicativas (o efeito adicional é nulo)

$$H_0 : \beta_j = 0 \qquad H_1 : \beta_j \neq 0$$

- Estatística de teste sob H_0

$$t_j = \frac{\hat{\beta}_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t(n-k-1)$$

- <u>Valor-p (p-value)</u>
  - é o menor nível de significância estatística para o qual ainda se rejeita H_0
  - Mede a evidência favorável a H_0
  - Depende da hipótese alternativa
  - Alternativa bilateral: $H_1 : \beta_j \neq 0$ então $p = 2P\left(t(n-k-1) > |t_{obsj}|\right)$
  - Alternativa $H_1 : \beta_j > 0$ então $p = P\left(t(n-k-1) > t_{obsj}\right)$
  - Alternativa $H_1 : \beta_j < b$ então $p = P\left(t(n-k-1) < t_{obsj}\right)$

Rejeitar H_0 sempre que $p < \alpha$ com α =0.01 ou 0.05 ou 0.1

3.2. Testes de hipóteses sobre um parâmetro

- **Teste sobre um valor para β_j**

$$H_0 : \beta_j = b$$

- Estatística de teste sob H_0

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - b}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t(n-k-1)$$

- Valor-p (p-value) e região de rejeição a $\alpha \times 100\%, W_\alpha$

$H_1 : \beta_j \neq b$ então $p = 2P\left(t(n-k-1) > |t_{obs}|\right)$; $W_\alpha = \{t : |t| > t_{\alpha/2}\}$; $t_{\alpha/2} : P(t(n-k-1) > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$

$H_1 : \beta_j > b$ então $p = P\left(t(n-k-1) > t_{obs}\right)$; $W_\alpha = \{t : t > t_\alpha\}$; $t_\alpha : P(t(n-k-1) > t_\alpha) = \alpha$

$H_1 : \beta_j < b$ então $p = P\left(t(n-k-1) < t_{obs}\right)$; $W_\alpha = \{t : t < -t_\alpha\}$; $t_\alpha : P(t(n-k-1) > t_\alpha) = \alpha$

- **Exemplo:** $H_0 : \beta_1 \geq -10 \quad H_1 : \beta_1 < -10$

valor observado da estatística de teste: $t = \dfrac{-10.50 - (-10)}{3.34} = -0.150 > -1.645$

Não rejeitar H_0

3.3. Testes sobre uma combinação linear dos parâmetros

- $H_0 : c_1\beta_1 + c_2\beta_2 = b$
- Estatística de teste sob H_0

$$t = \frac{c_1\hat{\beta}_1 + c_2\hat{\beta}_2 - b}{se(c_1\hat{\beta}_1 + c_2\hat{\beta}_2)} \sim t(n-k-1)$$

- Cálculo do erro padrão

$$se\left(c_1\hat{\beta}_1 + c_2\hat{\beta}_2\right) = \sqrt{c_1^2\hat{V}ar(\hat{\beta}_1) + c_2^2\hat{V}ar(\hat{\beta}_2) + 2c_1c_2\hat{C}ov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}$$

- **Exemplo:** Wald Test:

Test Statistic	Value	df	Probability
t-statistic	-1.231046	1639	0.2185

Null Hypothesis: 2*C(2)+C(5)=0
Null Hypothesis Summary:

Normalized Restriction (= 0)	Value	Std. Err.
2*C(2) + C(5)	-9.531905	7.742929

3.4. Testes sobre várias combinações linear dos parâmetros

- **Teste de significância global**
  - Estatística de teste sob H_0

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{n-k-1}{k} \sim F(k, n-k-1)$$

Com valor-p $p = P\left(F(k, n-k-1) > F_{obs}\right)$

- **Teste de *q* restrições lineares sobre os parâmetros**
  - Estatística de teste sob H_0

$$F \sim F(q, n-k-1)$$

Com valor-p $p = P\left(F(q, n-k-1) > F_{obs}\right)$

  - **Exemplo**

Wald Test:

Test Statistic	Value	df	Probability
F-statistic	0.784908	(2, 1639)	0.4563

Null Hypothesis: C(3)=C(4)=0

Normalized Restriction (= 0)	Value	Std. Err.
C(3)	3.558060	3.130502
C(4)	0.975131	7.147705